ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

VŨ THỊ HƯƠNG

ĐỒNG NHẤT THỨC LIOUVILLE VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương pháp toán sơ cấp**
Mã số: **8460113**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. NÔNG QUỐC CHINH

Thái Nguyên, 04/2019

Mục lục

Bảng ký hiệu

Q	Dạng toàn phương
$Q(x, y)$	Dạng toàn phương 2 biến x, y
$Q(x, y, z)$	Dạng toàn phương 3 biến x, y, z
$F(x, y, z)$	Hàm ba biến x, y, z
$\sigma(n)$	Hàm tổng các ước của n
$\sigma^*(n)$	Hàm tổng các ước của n mà ước liên hợp của chúng là lẻ
$\sigma_r(n)$	Hàm tổng lũy thừa bậc r của các ước của n
$\mathcal{R}(n)$	Tập tất cả các biểu diễn số nguyên của n bởi Q
$R_s(n)$	Số cách biểu diễn n thành tổng của s số bình phương
C_n^a	Số tổ hợp chập a của b phần tử
$\binom{b}{a}$	Số tổ hợp chập a của n phần tử
n, d, δ	Các số nguyên dương
u	Số nguyên

Mở đầu

Trong danh sách mười tám bài báo được xuất bản giữa những năm 1858 và 1865, Liouville đã khám phá và giới thiệu một phương pháp rất đặc biệt và hiệu quả về lý thuyết số mà từ đó có thể suy ra được rất nhiều kết quả. Ngày nay, chúng ta gọi các kết quả này là các đồng nhất thức Liouville. Các đồng nhất thức này bao hàm nội dung phát biểu của rất nhiều định lí số học. Kết quả về vấn đề này được Liouville xuất bản trong một chuỗi 90 bài báo.

Theo Liouville, nhiều công thức, định lí số học được đưa ra bởi các nhà toán học như Jacobi, Kronecker và các nhà toán học khác phải tuân theo một nguyên lý số học cơ bản. Ví dụ, với công thức về số cách biểu diễn một số nguyên dương thành tổng của 4 số bình phương, mà được suy ra từ công trình của Jacobi về hàm Elliptic, có thể được chứng minh hoàn toàn bởi các kiến thức số học cơ bản. Điều này không có nghĩa là đánh giá thấp việc sử dụng phân tích, lý thuyết số phức, dạng mô đun, hàm Elliptic và hàm Theta trong việc chứng minh các công thức số học mà chỉ để nhận ra rằng các công thức này là công thức cơ bản.

Từ các đồng nhất thức Liouville, chúng ta có thể đưa ra nhiều chứng minh sơ cấp của nhiều công thức số học. Nhận thấy sự đẹp đẽ, gọn gàng, tổng quát và tính ứng dụng cao của đồng nhất thức Liouville, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nông Quốc Chinh, chúng tôi xin chọn đề tài "Đồng nhất thức Liouville và ứng dụng" để làm luận văn cao học.

Mục tiêu của luận văn trình bày một số đồng nhất thức quan trọng của Liouville và chứng minh của chúng, áp dụng chúng để có được định lí về số cách biểu diễn một số nguyên thành tổng một số chẵn các số bình phương trên cơ sở nội dung của tài liệu [1] *M.B. Nathanson (2000), Elementary methods in number theory (SpringerVerlag)* và [2] *Aeran Kim, Keum Yeon Lee and Hwasin Park (2014), "Applications of Liouville's Identity with an Odd Function", Britsh Journal of Mathematic and Computer Science 4 (8), pp. 1074–1090.*

Ngoài phần Bảng ký hiệu, Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, bố cục của luận văn được chia làm ba chương.

Chương 1. Các kiến thức chuẩn bị. Trong chương này, chúng tôi giới thiệu một số kiến thức chuẩn bị như khái niệm hàm số lẻ, hàm số chẵn, các tính chất cơ bản của hàm số lẻ, hàm số chẵn, dạng toàn phương hai biến, dạng toàn phương ba biến.

Chương 2. Đồng nhất thức Liouville. Chúng tôi trình bày phát biểu của đồng nhất thức Liouville và chứng minh cũng như một số hệ quả trực tiếp từ đồng nhất thức.

Chương 3. Một vài ứng dụng của định lí Liouville. Ứng dụng đầu tiên của đồng nhất thức Liouville mà chúng tôi trình bày là bài toán đếm số cách biểu diễn một số nguyên dương thành tổng của 8 số bình phương. Sau đó, chúng tôi trình bày một đồng nhất thức được suy ra từ đồng nhất thức Liouville khi ứng dụng nó cho hàm số lẻ.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS. TS Nông Quốc Chinh. Trong quá trình nghiên cứu và thực hiện luận văn, thầy đã tận tình chỉ bảo hướng dẫn tác giả hoàn thiện rất nhiều về mặt kiến thức cũng như phương pháp nghiên cứu khoa học. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn, sự kính trọng sâu sắc nhất tới thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn tới các thầy cô giáo phòng Đào tạo, các thầy cô giáo khoa Toán – Tin, cũng như các thầy cô giáo giảng dạy lớp thạc sĩ K11D chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp, trường Đại học Khoa học đã giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập.

Nhân dip này tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã luôn quan tâm, động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập để tác giả hoàn thành khóa học và hoàn thiện luận văn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Người viết luận văn

Vũ Thị Hương

Chương 1

Các kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu một số kiến thức chuẩn bị như khái niệm hàm số lẻ, hàm số chẵn, các tính chất cơ bản của hàm số lẻ, hàm số chẵn, dạng toàn phương hai biến, dạng toàn phương ba biến.

1.1 Hàm số lẻ, hàm số chẵn

Trong toán học, hàm chẵn và hàm lẻ là các hàm mà được phân loại theo quan hệ đối xứng đặc biệt theo phép nghịch đảo của phép cộng. Chúng đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực của toán giải tích, đặc biệt là trong lý thuyết chuỗi lũy thừa và chuỗi Fourier.

Định nghĩa 1.1.1 ([3])**.** Cho $f(x)$ là hàm giá trị thực của biến thực. Ta nói f là hàm chẵn nếu $f(x) = f(-x)$ với x và $-x$ nằm trong miền xác định của f.

Về mặt hình học, đồ thị của hàm chẵn đối xứng qua trục Oy. Một số ví dụ về hàm chẵn là hàm $|x|, x^2, x^4, \cos(x), \ldots$. Hàm x^n trong đó n chẵn là hàm chẵn.

Định nghĩa 1.1.2 ([3])**.** Cho $f(x)$ là hàm giá trị thực của biến thực. Ta nói f là hàm lẻ nếu $-f(x) = f(-x)$ với x và $-x$ nằm trong miền xác định của f.

Về mặt hình học, đồ thị của hàm lẻ đối xứng qua gốc tọa độ. Một số ví dụ về hàm lẻ là hàm $x, x^3, \sin(x), \ldots$. Nếu $f(x)$ lẻ thì $f(0) = -f(0)$ nên $f(0) = 0$.

Định nghĩa 1.1.3 ([1])**.** Hàm $F(x, y, z)$ được gọi là hàm lẻ theo biến x nếu $F(-x, y, z) = -F(x, y, z)$, và là hàm chẵn theo cặp biến (y, z) nếu

$$F(x, -y, -z) = F(x, y, z).$$

Nếu $F(x, y, z)$ là hàm lẻ theo biến y và z thì suy ra $F(x, y, z)$ chẵn theo cặp biến (y, z). Ví dụ, với hàm $F(x, y, z) = xyz$ ta có

$$F(x, -y, z) = -xyz = -(xyz) = -F(x, y, z)$$
$$F(x, -y, -z) = -xyz = -(xyz) = -F(x, y, z).$$

Hay $F(x, y, z)$ là hàm lẻ theo biến y, z. Mặt khác, ta có

$$F(x, -y, -z) = -(-xyz) = xyz = F(x, y, z).$$

Hay $F(x, y, z)$ là hàm chẵn theo cặp biến (y, z).

1.2 Một số tính chất cơ bản của hàm số lẻ, hàm số chẵn

Tính chất 1.2.1 ([3])**.** Nếu một hàm vừa là hàm chẵn, vừa là hàm lẻ thì nó bằng 0 tại mọi điểm trong miền xác định của nó.

Chứng minh. Giả sử $f(x)$ vừa là hàm chẵn, vừa là hàm lẻ tại x. Khi đó ta có

$$-f(x) = f(-x) = f(x) \Leftrightarrow 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

□

Tính chất 1.2.2 ([3])**.** Nếu một hàm là hàm lẻ thì hàm giá trị tuyệt đối của hàm đó là hàm chẵn.

Chứng minh. Cho $f(x)$ là hàm lẻ. Đặt $g(x) = |f(x)|$ Khi đó, ta có

$$g(x) = |f(x)| = |-f(x)| = |f(-x)| = g(-x).$$

Vậy $g(x)$ là hàm chẵn. □

Tính chất 1.2.3 ([3])**.**

a) Tổng của hai hàm chẵn là một hàm chẵn, hiệu của hai hàm chẵn là một hàm chẵn.

b) Tổng của hai hàm lẻ là một hàm lẻ, hiệu của hai hàm lẻ là một hàm lẻ.

c) Tổng của một hàm chẵn với một hàm lẻ không là hàm chẵn cũng không là hàm lẻ trừ khi một trong hai hàm bằng 0 trong miền xác định.

Ví dụ 1.2.4. Từ tính chất trên ta thấy ngay $x^2+\cos(x), -2x^4+x^{-2}+5\cos(3x)+3$ là các hàm chẵn, $x-\sin(x), -2x^3+x+4\sin(3x)$ là hàm lẻ, $\cos x+\sin x$ không làm chẵn cũng không là hàm lẻ.

Tính chất 1.2.5 ([3])**.**

a) Tích của hai hàm chẵn là một hàm chẵn, thương của hai hàm chẵn là một hàm chẵn.

b) Tích của hai hàm lẻ là một hàm chẵn, thương của hai hàm lẻ là một hàm chẵn.

c) Tích của một hàm chẵn và một hàm lẻ là một hàm lẻ, thương của một hàm chẵn với một hàm lẻ là một hàm lẻ.

Ví dụ 1.2.6. Từ tính chất trên ta thấy, các hàm $13\cos(2x)\cos(3x), \dfrac{3}{\cos x}, \dfrac{x}{\sin x}$ là các hàm chẵn, $x\cos x, \dfrac{4}{x}$ là các hàm lẻ.

Tính chất 1.2.7 ([3])**.**

a) Tích hợp của hai hàm chẵn là một hàm chẵn.

b) Tích hợp của hai hàm lẻ là một hàm lẻ.

c) Tích của một hàm chẵn với một hàm lẻ là một hàm chẵn.

d) Tích hợp của hàm bất kỳ với một hàm chẵn là hàm chẵn.

Tính chất 1.2.8 ([3])**.** Tất cả mọi hàm số đều có thể được biểu diễn dưới dạng tổng của một hàm chẵn và một hàm lẻ, chúng được gọi là phần chẵn và phần lẻ của hàm số đó.

Chứng minh. Thật vậy, định nghĩa

$$f_e(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \tag{1.1}$$

và

$$f_o(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \tag{1.2}$$

thì f_e là hàm chẵn và f_o là hàm lẻ và

$$f(x) = f_e(x) + f_o(x).$$

Ngược lại, nếu

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

trong đó g là hàm chẵn và h là hàm lẻ. Khi đó, $g = f_e$ và $h = f_o$ vì

$$2f_e(x) = f(x) + f(-x) = g(x) + g(-x) + h(x) + h(-x) = 2g(x),$$
$$2f_o(x) = f(x) + f(-x) = g(x) - g(-x) + h(x) - h(-x) = 2h(x).$$

□

1.3 Số nguyên tố và dạng toàn phương

Định nghĩa 1.3.1 ([1])**.** Số *nguyên tố* là số nguyên p lớn hơn 1 mà chỉ có ước dương là 1 và p. Số nguyên dương lớn hơn 1 không phải là số nguyên tố được gọi là hợp số.

Các số nguyên tố nhỏ hơn 100 được sắp thứ tự tăng dần như sau: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$.

Định nghĩa 1.3.2 ([1])**.** Đa thức thuần nhất bậc hai n biến có dạng

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = w(x) \quad (\text{với } a_{ij} = a_{ji}, a_{ij} \in \mathbb{R})$$

được gọi là *dạng toàn phương n biến.*

Ví dụ, ta có

$$w(x) = a_{11}x_i^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 \quad (a_{12} = a_{21})$$

là dạng toàn phương 2 biến. Tương tự,

$$w'(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

là dạng toàn phương 3 biến.

Định nghĩa 1.3.3 ([1])**.** Dạng toàn phương theo hai biến là *dạng toàn phương hai biến.* Dạng toàn phương theo ba biến được gọi là *dạng toàn phương ba biến.*

Dạng tổng quát của dạng toàn phương một biến, hai biến và ba biến tương ứng là

$$Q(x) = ax^2$$
$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$
$$Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

trong đó $a, b, \ldots, f$ là các hệ số. Chú ý, hàm toàn phương $ax^2 + bx + c$ không là dạng toàn phương một biến vì nó không thuần nhất (trừ khi b và c đều bằng 0).

Định nghĩa 1.3.4 ([1])**.** Dạng toàn phương $Q(x, y, \ldots, z)$ được gọi là *biểu diễn* số nguyên n nếu tồn tại các số nguyên $a, b, \ldots, c$ sao cho $Q(a, b, \ldots, c) = n$.

Trong phần này, kí hiệu u, v và w là các số nguyên, và d, δ và ℓ là các số nguyên dương.

Ta bắt đầu với một số kết quả về ước số. Nhắc lại rằng d được gọi là *ước* của số nguyên dương n nếu tồn tại số nguyên δ sao cho $n = d\delta$. Số nguyên δ được gọi là *ước liên hợp* của d. *Hàm ước số* $\sigma(n)$ là hàm tổng tất cả các ước của n, tức là hàm xác định bởi

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Ký hiệu $\sigma^*(n)$ là tổng tất cả các ước của n mà ước liên hợp của chúng là lẻ.

Ví dụ 1.3.5. Ta có $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 17$ và $\sigma^*(10) = 2 + 10 = 12$.

Ta có tính chất nếu p là số nguyên tố lẻ thì $\sigma(p) = \sigma^*(p) = p + 1$.

Bổ đề 1.3.6 ([1])**.** *Cho n là số nguyên dương lẻ. Khi đó $\sigma(n)$ lẻ khi và chỉ khi n là số chính phương.*

Chứng minh. Gọi

$$n = \prod_{p|n} p^{v_p}$$

là phân tích thừa số duy nhất của n thành tích các số nguyên tố lẻ. Số nguyên dương d là ước của n khi và chỉ khi d có thể được viết dưới dạng

$$d = \prod_{p|n} p^{u_p},$$